Том 29, № 146 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-138-148
УДК 517.938

О рекуррентных движениях периодических процессов в секвенциально компактном топологическом пространстве

Сергей Михайлович ДЗЮБА
ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет»
170026, Российская Федерация, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22

Аннотация. Настоящая работа посвящена изучению свойств рекуррентных движений периодических процессов, заданных в хаусдорфовом секвенциально компактном топологическом пространстве Γ.

Введено определение рекуррентного движения периодического процесса и установлено основное свойство движений, которое жестко связывает произвольные и рекуррентные движения. На основании этого свойства показано, что в случае автономного процесса, заданного в пространстве Γ, классическое определение рекуррентного движения Дж. Биркгофа эквивалентно введенному в данной работе определению рекуррентного движения периодического процесса. Кроме того, показано, что в Γ ω- и α-предельные множества каждого движения автономного процесса являются секвенциально компактными минимальными множествами.

Основное значение полученных результатов состоит в том, что они фактически устанавливают взаимоотношение движений периодических процессов в пространстве Γ.

Ключевые слова: хаусдорфово топологическое секвенциально компактное пространство, периодические процессы, рекуррентные движения

Для цитирования: *Дзюба С.М.* О рекуррентных движениях периодических процессов в секвенциально компактном топологическом пространстве // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 146. С. 138–148. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-138-148

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-138-148

About recurrent motions of periodic processes in a sequentially compact topological space

Sergei M. DZYUBA
Tver State Technical University
22 Afanasiya Nikitina nab., Tver 170026, Russian Federation

Abstract. This article is devoted to the study of the properties of recurrent motions of periodic processes defined in a Hausdorff sequentially compact topological space Γ.

The definition of a recurrent motion of a periodic process is introduced and the main property of the motions is established. This property strictly connects arbitrary motions and recurrent motions in Γ. Based on this property, it is shown that, in the case of an autonomous process defined in the space Γ, the classical G. Birkhoff definition of a recurrent motion is equivalent to the definition of a recurrent motion of a periodic process introduced in this article. Besides, it is shown that in Γ, the ω- and α-limit sets of each motion of an autonomous process are sequentially compact minimal sets.

The main significance of the results obtained in the article is that they actually establish the interrelation between the motions of periodic processes in the space Γ.

Keywords: Hausdorff topological sequentially compact space, periodic processes, recurrent motions

Mathematics Subject Classification: 37B20.

For citation: Dzyuba S.M. About recurrent motions of periodic processes in a sequentially compact topological space. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:146 (2024), 138–148. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-138-148 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть Σ — метрическое пространство с метрикой d и $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — действительная ось. Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R}\times\Sigma \to \Sigma$ и положим

$$f(t,p) = g^t p.$$

При этом будем считать, что:

(a) отображение f непрерывно по совокупности переменных t, p на множестве $\mathbb{R}\times\Sigma$;

(b) для всех $p\in\Sigma$

$$g^0 p = p;$$

(c) для всех $t, s\in\mathbb{R}$

$$g^{t+s} = g^t g^s.$$

Тогда будем говорить, что группа преобразований g^t — *динамическая система*, а для любого $p\in\Sigma$ функция $t\to f(t,p)$ — *движение* (см. [1, с. 347]).

Важнейшим из всех движений является рекуррентное, так как в полном пространстве Σ замыкание $\bar{K}(p)$ траектории

$$K(p) = \{f(t,p)\colon\ t\in\mathbb{R}\}$$

рекуррентного движения $f(t,p)$ представляет собой компактное минимальное множество (см. [1, с. 404]), а каждое движение, расположенное в компактном минимальном множестве M, рекуррентно (см. [1, с. 402]); кроме того, любое компактное инвариантное множество M_1 содержит компактное минимальное множество M (см. [1, с. 401]).

Еще до недавнего времени считалось, что в связном пространстве Σ существуют компактные инвариантные множества

$$M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_k \supset \ldots,$$

каждое из которых не является объединением компактных минимальных множеств (см. [1, гл. V]). Однако, в работе [2] было доказано, что если $M_1 \neq \Sigma$, то в связном компактном пространстве Σ

$$M_1 = M_2 = \ldots = M_k = \ldots = \varnothing.$$

Это, очевидно, означает, что в компактном пространстве Σ не существует ни устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений, ни притягивающих множеств типа гомоклинического (или гетероклиноческого) аттрактора.

В продолжение результатов из [2] в работах [3,4] было установлено полное взаимоотношение движений в Σ и на топологическом компактном многообразии. Здесь необходимо отметить, что в [1, с. 365, с. 375] приведены три концептуальных примера построения множеств типа M_k на торе и на действительной плоскости $\mathbb{R}^2$. К сожалению, данные примеры оказались некорректными, что было показано в работе [5].

Целью настоящей работы является дальнейшее развитие результатов работ [2–4], заключающееся в изучении свойств рекуррентных движений периодических процессов в хаусдорфовом секвенциально компактном топологическом пространстве Γ. В частности, будет установлено полное взаимоотношение движений автономных процессов в Γ.

1. Процессы и движения

Пусть Γ — хаусдорфово секвенциально компактное топологическое пространство. Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\Gamma\to\Gamma$ и положим

$$f(\tau,t,p)=G(\tau,t)p.$$

При этом будем считать, что:

(a$'$) отображение f непрерывно по совокупности переменных τ,t,p на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\Sigma$;

(b$'$) для всех $(\tau,p)\in\mathbb{R}\times\Gamma$

$$G(\tau,0)p=p;$$

(c$'$) для всех $(\tau,t,s)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$G(\tau,t+s)=G(\tau+s,t)G(\tau,s).$$

Тогда будем говорить, что отображение f — *процесс*, а для любых $(\tau,p)\in\mathbb{R}\times\Gamma$ функция $t\to f(\tau,t,p)$ — *движение* (см. [6, с. 98]).

Если оператор $G(\tau,t)$ не зависит от τ, то процесс f называется *автономным*. В этом случае для всех $(t,p)\in\mathbb{R}\times\Gamma$

$$G(0,t)p=f(t,p)$$

и, следовательно, $G(0,t)$ представляет собой полную однопараметрическую группу преобразований g^t на Γ (см. [6, с. 99]).

Из всего множества процессов в дальнейшем будет рассматриваться только *периодический процесс*, т. е. процесс, удовлетворяющий условию

$$G(\tau+1,t)\equiv G(\tau,t).$$

Заметим, что автономный процесс по определению является периодическим.

Как обычно, в автономном случае множество $A\subset\Gamma$ будем называть *инвариантным*, если для всех $t\in\mathbb{R}$

$$G(0,t)A=A.$$

В автономном случае мы можем также принять важнейшие определения общей теории динамических систем, изначально введенные Дж. Биркгофом на замкнутом дифференцируемом многообразии (см. [7, гл. VII]). Именно:

(d) если $p\in\Gamma$, то *ω-предельным* множеством $\Omega(p)$ движения $f(t,p)$ называется множество

$$\Omega(p)=\bigcap_{t\geq 0}\overline{\bigcup_{s\geq t} f(s,p)};$$

(e) если $p\in\Gamma$, то *α-предельным* множеством $\mathrm{A}(p)$ движения $f(t,p)$ называется множество

$$\mathrm{A}(p)=\bigcap_{t\leq 0}\overline{\bigcup_{s\leq t} f(s,p)};$$

(f) множество $M\subset\Gamma$ называется *минимальным*, если оно непусто, замкнуто, инвариантно и не содержит ни одного собственного подмножества, обладающего тремя указанными выше свойствами;

(g) любое движение $f(t,p)$, расположенное в компактном минимальном множестве M, называется *рекуррентным*.

Вообще говоря, в неавтономном случае траектория

$$K(\tau, p) = \{f(\tau, t, p)\colon\ t \in \mathbb{R}\}$$

движения $f(\tau, t, p)$ зависит не только от p, но и от τ. Поэтому траектории движений здесь начинают пересекаться. Значит, определения (f) и (g) на неавтономные процессы прямо не переносятся. Это является основной проблемой при распространении свойств автономных процессов на неавтономные (в том числе и периодические).

2. Рекуррентные движения

Прежде всего, заметим, что пространство Γ является полуметризуемым пространством с отделимой структурой как хаусдорфово компактное пространство (см. [8, с. 458]). Поэтому везде в дальнейшем мы будем считать Γ именно полуметрическим пространством с отделимой структурой.

Напомним, что топологическое пространство Γ называется *полуметрическим*, если топология в нем индуцирована направленным семейством полуметрик $(d_i)_{i\in I}$, где множество индексов I может иметь произвольную мощность (см., например, [8, с. 456]).

Напомним также, что функция $d_\gamma\colon \Gamma\times\Gamma \to [0, +\infty)$ называется *полуметрикой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

(A) для всех $(p, q) \in \Gamma\times\Gamma$

$$d_\gamma(p, q) = d_\gamma(q, p);$$

(B) для всех $p \in \Gamma$

$$d_\gamma(p, p) = 0,$$

а случай

$$d_\gamma(p, q) = 0$$

не исключается при $q \neq p$;

(C) для всех $p \in \Gamma, q \in \Gamma$ и $r \in \Gamma$ выполнено неравенство треугольника

$$d_\gamma(p, q) \le d_\gamma(p, r) + d_\gamma(r, q).$$

И, наконец, напомним, что семейство полуметрик $(d_i)_{i\in I}$ называется *направленным*, если для любой конечной части $J \subset I$ найдется такое $k \in I$, что $d_k \ge d_j$ для всех $j \in J$. Если же для каждой пары $p \neq q$ найдется такая полуметрика d_γ, что

$$d_\gamma(p, q) > 0,$$

то будем говорить, что пространство Γ снабжено *отделимой структурой* (см. [8, с. 456]).

Полуметрики на Γ мы определим следующим образом.

Зафиксируем некоторое непустое открытое множество $\Gamma_0 \subset \Gamma$ и зададим непрерывное отображение $\gamma\colon \Gamma \to [0, +\infty)$, такое, что $\gamma(p) > 0$, если $p \in \Gamma_0$, и $\gamma(p) = 0$ в противном случае. Тогда, очевидно, равенство

$$d_\gamma(p, q) = |\gamma(p) - \gamma(q)|$$

дает полуметрику d_γ на Γ (см. [8, с. 457]).

Изменяя функцию γ, мы можем получать различные полуметрики d_γ. Значит, всегда можно построить семейство полуметрик $(d_i)_{i\in I_0}$, которое будет направленным. При этом всегда можно добиться того, что для двух любых точек $p\neq q$ нашлась полуметрика d_γ, для которой $d_\gamma(p,q)>0$. Проделав эту процедуру на всех непустых открытых множествах $\Gamma_0\subset\Gamma$, мы превратим Γ в полуметрическое пространство с отделимой структурой, где топология вводится семейством полуметрик $(d_i)_{i\in I}$.

П р и м е р 2.1. Важным примером секвенциально компактного полуметрического пространства Γ с отделимой структурой может служить компактное топологическое многообразие V (см., например, [4, 9]).

Чтобы привести простейший пример периодического процесса на V, предположим, что V — дифференцируемое многообразие размерности n в аффинном пространстве E размерности ν над полем $\mathbb{R}$, принадлежащее классу C^2. Обозначим через $\overrightarrow{E}$ — векторное пространство, присоединенное к E. Пусть для всех $x\in V$ и $t\in\mathbb{R}$ в векторном пространстве $\overrightarrow{T}(x;V)\subset\overrightarrow{E}$, касательном к V в точке x, лежит вектор $\overrightarrow{X}(x,t)$, и пусть отображение $\overrightarrow{X}\colon V\times\mathbb{R}\to\overrightarrow{T}(x;V)$ непрерывно и локально удовлетворяет условию Липшица по x. И, наконец, будем считать, что

$$\overrightarrow{X}(x,t+1)\equiv\overrightarrow{X}(x,t).$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\overrightarrow{dx}}{dt}=\overrightarrow{X}(x,t). \tag{2.1}$$

Если многообразие V компактно, то, действуя стандартным образом, несложно показать, что любое непродолжаемое решение $x=f(\tau,t,p)$ уравнения (2.1) с начальными значениями $(\tau,p)\in\mathbb{R}\times V$ определено для всех $t\in\mathbb{R}$ (см., например, [8, с. 34]). Отсюда непосредственно следует, что отображение $f\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times V\to V$ — периодический процесс.

О п р е д е л е н и е 2.1. Пусть f — периодический процесс, и пусть $f(\tau,t,p)$ — некоторое движение. Предположим, что для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$, что для всех $t\in\mathbb{R}$

$$d_i(f(\tau,t,p),f(\tau,t+N_\varepsilon,p))<\varepsilon,\quad i\in I. \tag{2.2}$$

Тогда будем говорить, что $f(\tau,t,p)$ — *рекуррентное движение.*

В силу равенства (2.2) несложно заметить, что если $f(\tau,t,p)$ — рекуррентное движение, то найдется такая последовательность натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}\uparrow+\infty$, что

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}d_i(f(\tau,t,p),f(\tau,t+N_k,p))=0,\quad i\in I,$$

и обратно. Существование рекуррентных (в смысле определения 2.1) движений устанавливает следующая

Теорема 2.1. *Пусть f — периодический процесс, и пусть $f(\tau,t,p)$ — некоторое движение. Тогда из любой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}\uparrow+\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $(N_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}\uparrow+\infty$, что существуют рекуррентные движения $f(\tau,t,q)$ и $f(\tau,t,r)$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(i) *равномерно на каждом отрезке* $[a,b]\subset\mathbb{R}$

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(\tau,t+N_{k_l},p),f(\tau,t,q))=0,\quad i\in I,$$

и

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(\tau,t-N_{k_l},p),f(\tau,t,r))=0,\quad i\in I;$$

(ii) *равномерно на всей оси* $\mathbb{R}$

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(\tau,t+N_{k_{l+1}}-N_{k_l},q),f(\tau,t,q))=0,\quad i\in I,$$

и

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(\tau,t-N_{k_{l+1}}+N_{k_l},r),f(\tau,t,r))=0,\quad i\in I.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что для доказательства теоремы 2.1 достаточно установить существование рекуррентного движения $f(\tau,t,q)$, удовлетворяющего условиям (i) и (ii). Проделаем это.

Для всех $N=1,2,\ldots$ положим

$$p_N=f(\tau,N,p). \tag{2.3}$$

Тогда в силу периодичности процесса f несложно заметить, что

$$p_{N+m}=f(\tau,m,p_N),\quad N=1,2,\ldots,\quad m=0,1,\ldots \tag{2.4}$$

Пусть $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}\uparrow+\infty$ — произвольная последовательность натуральных чисел. В соответствии с $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ из $(p_N)_{N\in\mathbb{N}}$ выберем последовательность $(p_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$. В силу секвенциальной компактности пространства Γ из $(p_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ можно извлечь такую ее подпоследовательность $(p_{N_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$, что для некоторой точки $q\in\Gamma$

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(p_{N_{k_l}},q)=0,\quad i\in I,$$

и $f(\tau,t,q)$ — движение, расположенное в Γ.

Поскольку отображение $(\tau,t,x)\to f(\tau,t,x)$ непрерывно и пространство Γ компактно, множество P функций

$$t\to f(\tau,t,p_N),\quad N=1,2,\ldots,$$

определенных при $t\in\mathbb{R}$, равностепенно непрерывно на произвольном отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$ (см. [9]). Поэтому согласно теореме Арцела – Асколи равномерно на каждом отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(\tau,t,p_{N_{k_l}}),f(\tau,t,q))=0,\quad i\in I, \tag{2.5}$$

(см. [8, с. 489]). Аналогичным образом, множество Q функций

$$t\to f(\tau,t\pm m,q),\quad m=0,1,\ldots,$$

определенных на отрезке $[0,1]$, равностепенно непрерывно на $[0,1]$. Следовательно, его замыкание $\bar{Q}$ компактно в топологии равномерной сходимости.

Для всех $l=1,2,\ldots$ обозначим через $P_{N_{k_l}}$ — множество функций

$$t\to f(t+m,p_{N_{k_l}}),\quad m=0,1,\ldots,$$

определенных на отрезке $[0,1]$, а через $Q_0 \subset Q$ — множество функций

$$t \to f(t+m, q), \quad m = 0, 1, \dots,$$

также определенных на $[0,1]$. Тогда в силу равенств (2.3) и (2.5)

$$\bar{Q}_0 \subset \bigcap_{l \geq 1} \bar{P}_{N_{k_l}}, \tag{2.6}$$

где $\bar{P}_{N_{k_l}}$ и $\bar{Q}_0$ — замыкания множеств $P_{N_{k_l}}$ и Q_0 соответственно.

Пусть

$$\Delta_{N_{k_l}} = N_{k_{l+1}} - N_{k_l}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Принимая во внимание равенство (2.4), заметим, что

$$p_{N_{k_{l+1}}} = f(\tau, \Delta_{N_{k_l}}, p_{N_{k_l}}).$$

Следовательно, согласно равенству (2.5)

$$\lim_{l \to +\infty} d_i(\tau, f(\Delta_{N_{k_l}}, p_{N_{k_l}}), q) = 0, \quad i \in I. \tag{2.7}$$

Более того, так как пространство Γ секвенциально компактно, то без какой-либо потери общности можем считать, что найдется такая точка $q^* \in \Gamma$, что существует предел

$$\lim_{l \to +\infty} d_i(f(\tau, \Delta_{N_{k_l}}, q), q^*) = 0, \quad i \in I. \tag{2.8}$$

Заметим теперь, что в пространстве Γ введена отделимая полуметрическая структура. Поэтому, если $q \neq q^*$, то существует такая полуметрика d_γ, что

$$d_\gamma(q, q^*) > 0.$$

Тогда в силу равенств (2.7) и (2.8) найдется такое положительное число $\varepsilon > 0$, что при всех $l = 1, 2, \dots$

$$d_\gamma(f(\tau, \Delta_{N_{k_l}}, p_{N_{k_l}}), f(\tau, \Delta_{N_{k_l}}, q)) \geq \varepsilon. \tag{2.9}$$

В этом случае движение $f(\tau, t, q)$ не является периодическим движением с натуральным периодом. Значит,

$$\sup_{l \geq 1} \Delta_{N_{k_l}} = +\infty \tag{2.10}$$

и

$$\sup_{l \geq 1} (\Delta_{N_{k_{l+1}}} - \Delta_{N_{k_l}}) = +\infty. \tag{2.11}$$

Для простоты обозначений положим

$$t_{k_l} = \Delta_{N_{k_l}} + 1, \quad l = 1, 2, \dots$$

Тогда согласно неравенству (2.9) для всех $l = 1, 2, \dots$

$$\max_{0 \leq t \leq t_{k_l}} d_\gamma(f(\tau, t, p_{N_{k_l}}), f(\tau, t, q)) \geq \varepsilon.$$

Поэтому в силу равенства (2.5) без какой-либо потери общности можем считать, что существует такая последовательность положительных чисел $(\varepsilon_l)_{l\in\mathbb{N}} \downarrow 0$, что

$$\max_{0\le t\le t_{k_l}} d_\gamma(f(\tau,t,p_{N_{k_l}}), f(\tau,t,q)) \ge \varepsilon \tag{2.12}$$

и

$$\max_{0\le t\le t_{k_l}} d_\gamma(f(\tau,t,p_{N_{k_{l+1}}}), f(\tau,t,q)) < \varepsilon_l. \tag{2.13}$$

Согласно (2.10) объединение

$$\bigcup_{l\ge 1}[0,t_{k_l}]$$

расширяющихся отрезков

$$[0,t_{k_1}] \subset [0,t_{k_2}] \subset \ldots \subset [0,t_{k_l}] \subset \ldots$$

исчерпывает всю полуось $[0,+\infty)$, а на каждом отрезке $[0,t_{k_l}]$ выполнены неравенства (2.12) и (2.13). Последнее, однако, в силу равенства (2.11) и включения (2.6) невозможно.

Полученное противоречие означает, что вне зависимости от периодичности движения $f(\tau,t,q)$

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(\tau,\Delta_{N_{k_l}},q),q) = 0, \quad i\in I.$$

Следовательно, равномерно на каждом отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(\tau,t+\Delta_{N_{k_l}},q), f(\tau,t,q)) = 0, \quad i\in I. \tag{2.14}$$

Кроме того, поскольку множество $\bar{Q}$ компактно, то согласно равенству (2.14)

$$\bar{Q} = \bigcap_{l\ge 1} g^{\Delta_{N_{k_l}}}\bar{Q} \tag{2.15}$$

(см. [9]).

Предположим, что сходимость в (2.14) не равномерна на всей оси $\mathbb{R}$. Тогда существуют такие $\varepsilon>0$ и $j\in I$, что для всех $l=1,2,\ldots$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} d_j(f(\tau,t+\Delta_{N_{k_l}},q), f(\tau,t,q)) \ge \varepsilon.$$

Поэтому найдутся такие последовательности $(\varepsilon_l)_{l\in\mathbb{N}}\uparrow\varepsilon$ положительных и $(m_l)_{l\in\mathbb{N}}\uparrow+\infty$ натуральных чисел, что

$$\delta_l = \max_{-m_l\le t\le m_l} d_j(f(\tau,t+\Delta_{N_{k_l}},q), f(\tau,t,q)) \ge \varepsilon_l.$$

Следовательно,

$$\lim_{l\to+\infty}\sup\,\delta_l \ge \varepsilon.$$

Последнее, однако, противоречит равенству (2.15). Значит, сходимость в равенстве (2.14) равномерна на всей оси $\mathbb{R}$. Отсюда в силу определения 2.1 непосредственно следует, что $f(\tau,t,q)$ — рекуррентное движение. □

Очевидно, что теорема 2.1 фактически устанавливает взаимоотношение движений в секвенциально компактном пространстве Γ. При этом необходимо отметить, что предположение о секвенциальности пространства Γ выглядит вполне естественным и прямо связано с определением 2.1.

3. Автономный случай

Для полноты картины обратимся к рассмотрению автономного процесса и заметим, что согласно теоремам 2.1 и 3.1 работы [9] справедлива следующая

Теорема 3.1. *Пусть* f *— автономный процесс, и пусть* $f(t,p)$ *— некоторое движение. Тогда из любой последовательности натуральных чисел* $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}\uparrow+\infty$ *можно выбрать такую ее подпоследовательность* $(N_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}\uparrow+\infty$, *что существуют рекуррентные* (*в смысле определения* (g)) *движения* $f(t,q)$ *и* $f(t,r)$, *удовлетворяющие следующим условиям*:

(i′) *равномерно на каждом отрезке* $[a,b]\subset\mathbb{R}$

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(t+N_{k_l},p),f(t,q))=0,\quad i\in I,$$

и

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(t-N_{k_l},p),f(t,r))=0,\quad i\in I;$$

(ii′) *равномерно на всей оси* $\mathbb{R}$

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(t+N_{k_{l+1}}-N_{k_l},q),f(t,q))=0,\quad i\in I,$$

и

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(t-N_{k_{l+1}}+N_{k_l},r),f(t,r))=0,\quad i\in I.$$

Таким образом, в силу теорем 2.1 и 3.1 настоящей работы видим, что в секвенциально компактном пространстве Γ для автономного процесса f определения 2.1 и (g) эквивалентны. При этом необходимо отметить, что в условиях теоремы 3.1 ω- и α-предельные множества движения $f(t,p)$ являются секвенциально компактными минимальными множествами (см. [9]). Следовательно, теорема 3.1 устанавливает полное взаимоотношение движений автономных процессов в Γ.

References

[1] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, УРСС, М., 2004. [V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, URSS Publ., Moscow, 2004 (In Russian)].

[2] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “О новых свойствах рекуррентных движений и минимальных множеств динамических систем”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 5–14. [A. P. Afanas’ev, S. M. Dzyuba, “About new properties of recurrent motions and minimal sets of dynamical systems”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:13 (2021), 5–14 (In Russian)].

[3] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “О взаимоотношении движений динамических систем”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:138 (2022), 136–142. [A. P. Afanas’ev, S. M. Dzyuba, “On the interrelation of motions of dynamical systems”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:138 (2022), 136–142 (In Russian)].

[4] S. M. Dzyuba, “On the interrelation of motions of dynamical systems on compact manifolds”, *Lobachevskii J. Math.*, **44**:7 (2023), 2630–2637.

[5] A. P. Afanas’ev, S. M. Dzyuba, “The interrelation of motions of dynamical systems in a metric space”, *Lobachevskii J. Math.*, **43**:12 (2022), 3414–3419.

[6] Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984. [J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Mir Publ., Moscow, 1984 (In Russian)].

[7] Дж. Биркгоф, *Динамические системы*, Изд. дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999. [G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Udm. University Publ., Izhevsk, 1999 (In Russian)].

[8] Л. Шварц, *Анализ.* Т. II, Мир, М., 1972. [L. Schwartz, *Analisys.* V. II, Mir Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].

[9] С. М. Дзюба, "О рекуррентных движениях динамических систем в полуметрическом пространстве", *Вестник российских университетов. Математика*, **28**:144 (2023), 371–382. [S. M. Dzyuba, "On the recurrent motions of dynamical systems in a semi-metric space", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:144 (2023), 371–382 (In Russian)].

Информация об авторе

Дзюба Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

Поступила в редакцию 15.01.2024 г.
Поступила после рецензирования 13.05.2024 г.
Принята к публикации 07.06.2024 г.

Information about the author

Sergei M. Dzyuba, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems Department, Tver State Technical University, Tver, Russian Federation. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

Received 15.01.2024
Reviewed 13.05.2024
Accepted for press 07.06.2024